

4. EXTRÉMY - ELEMENTÁRNÍ METODY

hylova@karlin.mff.cuni.cz, <http://karlin.mff.cuni.cz/~hylova/>

Teorie, kterou budeme používat:

Věta 6 *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int}M$, $j \in \{1, \dots, n\}$ a funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ má v bodě a lokální extrém (vzhledem k M). Pak $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ neexistuje nebo je nulová.*

Věta 9 *Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je **kompaktní**, právě když je **uzavřená** a **omezená**.*

Věta 10 *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná kompaktní množina a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na M . Pak f nabývá na M svého maxima i minima.*

Postup:

1. $M = \mathbb{R}^n$

- (a) Najdeme stacionární body (tj. body, kde jsou parciální derivace podle všech proměnných nulové nebo neexistují).
- (b) Pomocí limit v nekonečnu a odhadů určíme supremum a infimum $f(M)$

.

2. M kompaktní:

- (a) Ve vnitřku M najdeme stacionární body.
- (b) Parametrizujeme hranici a tím převedeme úlohu na případ o jednu dimenzi nižší.
- (c) Pokud byla dimenze větší než 2, opakujeme kroky 1. a 2., dokud to jde.
- (d) Mezi podezřelé body zahrneme i krajní body hranice.
- (e) Porovnáme funkční hodnoty všech podezřelých bodů.

3. M není kompaktní: vyšetřujeme extrémy f na $\overline{M}$, protože i body na hranici ovlivňují hodnoty suprema a infima. Pokud M není omezená, je třeba odhadnout funkci nebo spočítat limitu v nekonečnu.

Příklad 2: $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq 1\}$;

M je kompaktní (obrázek viz příložený soubor) a f spojitá. Nejprve najdeme stacionární body na $\text{Int}M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < 1\}$. (žlutá část).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - x.$$

Položíme-li obě derivace rovné nule, dostaneme řešení $[x, y] = [0, 0]$. Protože $A = [0, 0] \in \text{Int}M$, je to první podezřelý bod.

Nyní budeme vyšetřovat hranici M . Ta se nedá jednoduše parametrizovat jedním vzorcem, proto si ji rozdělíme na čtyři části:

1. $y = x + 1, x \in \langle -1, 0 \rangle$ (modrá úsečka)

Dosadíme za y do vzorečku pro f : $f(x) = x^2 - x(x + 1) + (x + 1)^2 = x^2 + x + 1$. Nyní hledáme stacionární body f pro $x \in \langle -1, 0 \rangle$.

$$f'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}. \text{ Dostáváme}$$

podezřený bod $B = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Navíc zahrneme i krajní body úsečky:

$$C = [-1, 0] \text{ a } D = [0, 1].$$

2. $y = -x + 1, x \in \langle 0, 1 \rangle$ (červená úsečka)

Analogicky jako v předchozím případě dostaneme body $E = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ a

$$F = [1, 0]$$

3. $y = -x - 1, x \in \langle -1, 0 \rangle$ (zelená úsečka) $\Rightarrow G = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right], H = [0, -1]$

4. $y = x - 1, x \in \langle 0, 1 \rangle$ (hnědá úsečka) $\Rightarrow I = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$

Nyní zbývá už jen spočítat funkční hodnoty ve všech podezřelých bodech:

$$f(A) = 0, f(B) = f(I) = \frac{3}{4}, f(C) = f(D) = f(F) = f(H) = 1$$

$f(E) = f(G) = \frac{1}{4}$. Porovnáním těchto funkčních hodnot můžeme příklad uzavřít s výsledkem: minimum je 0 a nabývá se v A a maximum je 1 v C, D, F, H .

Příklad 4: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$; $M = \mathbb{R}^3$;

Nejprve určíme stacionární body:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 6 = 0 \Rightarrow z = 3$$

Dostáváme jediný bod $[-1, -2, 3]$ s funkční hodnotou -14 . Snadno nahlédneme, že např. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y, z) = \infty$ pro (y, z) pevné. Tudíž supremum f na M je ∞ , neboli f není na M omezená. (Poznámka: lze počítat i jakoukoli jinou limitu, která vyjde nekonečno, např. limitu do $-\infty$ nebo limity v y nebo z .) Zbývá dokázat, že -14 je minimum (tuto domněnku můžeme získat například z toho, že všechny limity do nekonečna vyšly nekonečné/kladné).

Platí:

$$x^2 + 2x \geq -1$$

$$y^2 + 4y \geq -4$$

$$z^2 - 6z \geq -9$$

(například z průběhů funkcí jedné proměnné), dohromady:

$f(x, y, z) \geq -1 - 4 - 9 = -14$. Tudíž -14 je minimum.

Nápovědy k dalším typům příkladů:

- Příklad 1: Hranici M rozdělíme na šest stěn (např. $z = 1, x, y \in \langle -1, 1 \rangle$). Na každé stěně dosadíme do funkčního předpisu (v tomto případě $z = 1 : f(x, y) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + 1$). Nyní už máme funkci dvou proměnných na dvoudimenzionální množině a můžeme postupovat stejně jako v příkladu 2 (třetí souřadnice bude u této stěny vždy 1). Je dobré si všimnout, že hrany jsou společné pro více stěn, takže je nemusíme počítat víckrát.
- Příklady 16 - 18: zde je cílem udělat si představu, jak by se mohlo vyšetřování extrémů funkcí více proměnných použít v běžném životě. Je třeba slovní zadání převést na matematickou formulaci (tedy určit f a M) a poté takto formulovaný příklad vyřešit podobně jako všechny předchozí.